第 5 講　関数の極限

PART1 関数の極限

要点整理と公式

要点 ① 関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，$f(x)$ は α に「　　　」するといい

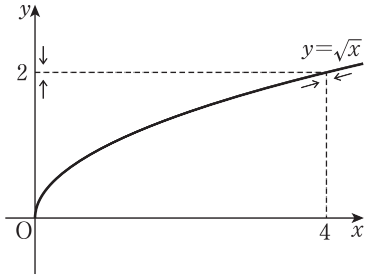
$f(x)=\alpha$　または　　　　　　のとき　$f(x)$

と表す。また，このときの α を，x が a に近づくときの $f(x)$ の「　　　　」という。

(ex) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ において，x が 4 と異なる値をとりながら 4 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は $\sqrt{4}=2$ に限りなく近づく。よって

$\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$　または　$x\to 4$ のとき $\sqrt{x}\to 2$

と表される。



数列の場合と同様に，関数の極限値についても，次のことが成り立つ。

関数の極限の性質

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$　のとき

① $\lim_{x\to a}kf(x)=k\alpha$　（ただし，k は定数）

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$　　$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

③ $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$　　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$\beta\neq 0$）

要点 ② 関数の極限の計算

関数 $f(x)$ が x の整式で表される関数，三角関数，指数関数，対数関数，分数関数，無理関数であるとき，a が関数の定義域に属するならば，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

(ex) $\lim_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

※定数関数 $f(x)=c$ については，$\lim_{x\to a}f(x)=c$ である。例えば，$\lim_{x\to 1}2=2$ である。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在する場合がある。

たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ は，$x=$　のとき

分母が 0 になるので，$x=$　では定義されていない。

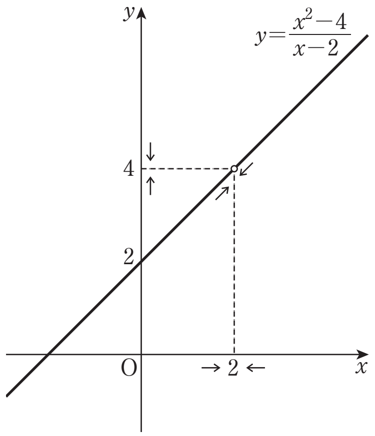
しかし，xキ　のとき

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

と変形できることから

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=$$

となり，$\lim_{x\to 2}f(x)$ は存在する。



(ex) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\qquad}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{\qquad}{\qquad}$

$=\dfrac{1}{2^2+2\cdot 2+4}=\dfrac{1}{12}$

形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ となる極限，いわゆる「　　　　」の極限については，数列の極限と同様，適切な式変形によって極限が求められる形にする。

1 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(x^2-2x+5\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{3x+4}{x-1}$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\sqrt{2x-1}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

Point Pickup

関数の極限の計算

関数 $f(x)$ が x の整式，三角・指数・対数関数，分数・無理関数であるとき，a が関数の定義域に属するならば，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

つまり，$f(x)$ に $x=a$ を代入して得られる値が極限値である。

$\frac{0}{0}$ の不定形の極限

形式的に $\frac{0}{0}$ の形となる関数の極限

→ 因数分解＆約分，有理化などの式変形により極限が求められる形にする。

第 5 講 PART1 確認問題

次の極限を求めよ。

1 $\lim_{x\to 3}(x^2-2x+4)=$ ［ア］

2 $\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-5}{x-1}=$ ［イ］

3 $\lim_{x\to 5}\sqrt{3x+1}=$ ［ウ］

4 $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-12}{x^2-x-2}=$ ［エ］

5 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(4-\dfrac{8}{x+2}\right)=$ ［オ］

6 $\lim_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\dfrac{［カ］}{［キ］}$

第 5 講 関数の極限

PART1 関数の極限

1 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+5)$ (ii) $\lim_{x\to -1}\frac{3x+4}{x-1}$ (iii) $\lim_{x\to 5}\sqrt{2x-1}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)$ (iii) $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

[解答]

(1)(i) $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+5)=2^2-2\cdot2+5=5$

(ii) $\lim_{x\to -1}\frac{3x+4}{x-1}=\frac{3\cdot(-1)+4}{-1-1}=-\frac{1}{2}$

(iii) $\lim_{x\to 5}\sqrt{2x-1}=\sqrt{2\cdot5-1}=\sqrt{9}=3$

(2)(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2x+3)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{2x+3}=\frac{3}{5}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2(x+2)-4}{x+2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{x+2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+2}=1$

(iii) $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x+7}-2)(\sqrt{x+7}+2)}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+7)-4}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{\sqrt{x+7}+2}=\frac{1}{4}$

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x+4\right)=7$$ [A]

[A]　$x\to 3$ のとき，
$x^2-2x+4\ \to\ 7$

2

[正解] イ：1

[解説]

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-5}{x-1}=1$$ [B]

[B]　$x\to 4$ のとき，
$\dfrac{2x-5}{x-1}\ \to\ 1$

3

[正解] ウ：4

[解説]

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{3x+1}=\sqrt{16}$$ [C]

$$=4$$

[C]　$x\to 5$ のとき，
$\sqrt{3x+1}\ \to\ 4$

4

[正解] エ：4

[解説]

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$ [D]

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)}{x+1}$$

$$=\frac{3\cdot 4}{3}=4$$

[D]　分母・分子を因数分解し，
$(x-2)\ (\neq 0)$ で約分する。

5　**[正解]** オ：2

[解説]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(4-\frac{8}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{4(x+2)-8}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{x+2}$$ [E]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+2}$$

$$=\frac{4}{2}=\mathbf{2}$$

[E]　$x \fallingdotseq 0$ として，分母・分子を x で約分する。

6　**[正解]** カ：1，キ：2

[解説]

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$ [F]

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)-1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

[F]　分母・分子に $\sqrt{x+3}+1$ をかけ，分子を有理化する。